

5. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $x = u \cos \frac{v}{u}$, $y = u \sin \frac{v}{u}$, $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, 1, 0]$

Použijeme větu ?? o dvou implicitních funkcích. Zavedme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = x - u \cos \frac{v}{u}, F_2(x, y, u, v) = y - u \sin \frac{v}{u}.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojité parciální derivace na okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$. Spočtěme nyní parciální derivace podle u a v a ověřme poslední předpoklad věty ??.

$$\begin{aligned} (F_1)'_u(x, y, u, v) &= -\cos \frac{v}{u} + u \sin \frac{v}{u} \cdot \frac{-v}{u^2} = -\cos \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \\ (F_1)'_v(x, y, u, v) &= \sin \frac{v}{u} \\ (F_2)'_u(x, y, u, v) &= -\sin \frac{v}{u} - u \cdot \frac{-v}{u^2} \cos \frac{v}{u} = \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} - \sin \frac{v}{u} \\ (F_2)'_v(x, y, u, v) &= -\cos \frac{v}{u} \end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{aligned} (F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) - (F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) &= \\ = (-1) \cdot (-1) - (0) \cdot (0) &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Podle věty ?? tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$.

Navíc platí, že $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 = F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y))$ (ze znění věty). Platí tedy následující rovnosti.

$$F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = x - \varphi(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} = 0 \quad (1)$$

$$F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = y - \varphi(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} = 0 \quad (2)$$

K vypočtení φ'_x, ψ'_x zderivujeme rovnosti 1, 2 podle x . Všimněme si, že pravá strana je 0, tedy se nám zderivuje na 0. Dostaneme následující soustavu.

$$\begin{aligned} 1 - \varphi'_x(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} - \varphi(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_x(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_x(x, y)}{\varphi(x, y)^2} &= 0 \\ -\varphi'_x(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} + \varphi(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_x(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_x(x, y)}{\varphi(x, y)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme tak vztahy pro φ'_x, ψ'_x . Jelikož nás zajímají derivace jen v bodě $[x_0, y_0]$, dosadíme do předchozí rovnice tento bod a až pak soustavu vyřešíme, abychom spočetli hodnoty derivací. Dosazením bodu $[x_0, y_0]$ dostáváme následující soustavu.

$$1 - \varphi'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{\psi'_x(x_0, y_0) \cdot 1 - 0}{1^2} = \psi'_x(x_0, y_0) = 0$$

Dostáváme, že $\varphi'_x(x_0, y_0) = 1$, $\psi'_x(x_0, y_0) = 0$.

Stejným způsobem spočteme derivace podle y . Zderivováním rovnic 1, 2 podle y dostaneme:

$$-\varphi'_y(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} - \varphi(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_y(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_y(x, y)}{\varphi(x, y)^2} = 0$$

$$1 - \varphi'_y(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} + \varphi(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_y(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_y(x, y)}{\varphi(x, y)^2} = 0$$

Dosazením bodu $[x_0, y_0]$ dostaneme:

$$-\varphi'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$1 - \psi'_x(x_0, y_0) = 0$$

Platí tedy, že $\varphi'_y(x_0, y_0) = 0$, $\psi'_y(x_0, y_0) = 1$

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení. Začněme tedy nejdříve dopočítáním zbylých parciálních derivací funkcí F_1, F_2 .

$$(F_1)'_x(x, y, u, v) = 1$$

$$(F_1)'_y(x, y, u, v) = 0$$

$$(F_2)'_x(x, y, u, v) = 0$$

$$(F_2)'_y(x, y, u, v) = 1$$

Jelikož, $\varphi(x_0, y_0) = u_0$ a $\psi(x_0, y_0) = v_0$, tak platí následující.

$$(F_1)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) = 1$$

$$(F_1)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$$

$$(F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) = -1$$

$$(F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$$

$$(F_2)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$$

$$(F_2)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) = 1$$

$$(F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$$

$$(F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) = -1$$

Nyní dosadíme do vzorců a dopočteme parciální derivace φ, ψ .

$$\begin{aligned}
\psi'_x(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_x(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-0 - 1 \cdot 0}{0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \\
\varphi'_x(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0)\psi'_x(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{0 - 1}{-1} = 1 \\
\psi'_y(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_y(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-1 - 0}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1 \\
\varphi'_y(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0)\psi'_y(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-0 \cdot 1 - 0}{-1} = 0
\end{aligned}$$

Spočteme derivace φ a ψ ještě **jedním způsobem** a to pomocí matice.

Z teorie (která pochází ze supersemináře) víme, že vektor $(\varphi_x(1, 0), \psi_x(1, 0))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{array} \right) (1, 0, 1, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_x(1, 0) = 1, \psi'_x(1, 0) = 0$.

Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{array} \right) (1, 0, 1, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_y(1, 0) = 0, \psi'_y(1, 0) = 1$.

Příklad 1 (b) $xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0]$

Použijeme větu ?? o dvou implicitních funkcích. Zavedme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = xe^{u+v} + 2uv - 1, F_2(x, y, u, v) = ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojitě parciální derivace na okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$.

Spočteme nyní parciální derivace funkcí F_1, F_2 .

$$\begin{aligned}
(F_1)'_x(x, y, u, v) &= e^{u+v} \\
(F_1)'_y(x, y, u, v) &= 0 \\
(F_1)'_u(x, y, u, v) &= xe^{u+v} + 2v \\
(F_1)'_v(x, y, u, v) &= xe^{u+v} + 2u \\
(F_2)'_x(x, y, u, v) &= -2 \\
(F_2)'_y(x, y, u, v) &= e^{u-v} \\
(F_2)'_u(x, y, u, v) &= ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} \\
(F_2)'_v(x, y, u, v) &= -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2}
\end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{aligned} & (F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) - (F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) = \\ & = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0 \end{aligned}$$

Podle věty ?? tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$.

Parciální derivace spočteme stejně jako v příkladu 1 (a). Tj. zderivujeme rovnosti $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0, F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0$, do získané soustavy dosadíme bod $[x_0, y_0]$ a soustavu vyřešíme.

$$F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = xe^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} + 2\varphi(x, y)\psi(x, y) - 1 = 0$$

$$F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = ye^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} - \frac{\varphi(x, y)}{1 + \psi(x, y)} - 2x = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \implies & e^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} + xe^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} (\varphi'_x(x, y) + \psi'_x(x, y)) + 2\varphi'_x(x, y)\psi(x, y) + 2\varphi(x, y)\psi'_x(x, y) = 0 \\ & ye^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} (\varphi'_x(x, y) - \psi'_x(x, y)) - \frac{\varphi'_x(x, y) \cdot (1 + \psi(x, y)) - \varphi(x, y) \cdot \psi'_x(x, y)}{(1 + \psi(x, y))^2} - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_0, y_0] \implies & e^0 + 1 \cdot e^0 (\varphi'_x(x_0, y_0) + \psi'_x(x_0, y_0)) = 0 \\ & 2e^0 (\varphi'_x(x_0, y_0) - \psi'_x(x_0, y_0)) - \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{1} - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \varphi'_x(x_0, y_0) + \psi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ \varphi'_x(x_0, y_0) - 2\psi'_x(x_0, y_0) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme: $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \psi'_x(x_0, y_0) = -1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \implies & xe^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} (\varphi'_y(x, y) + \psi'_y(x, y)) + 2\varphi'_y(x, y)\psi(x, y) + 2\varphi(x, y)\psi'_y(x, y) = 0 \\ & e^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} + ye^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} (\varphi'_y(x, y) - \psi'_y(x, y)) - \frac{\varphi'_y(x, y) \cdot (1 + \psi(x, y)) - \varphi(x, y) \cdot \psi'_y(x, y)}{(1 + \psi(x, y))^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_0, y_0] \implies & 1 \cdot e^0 (\varphi'_y(x_0, y_0) + \psi'_y(x_0, y_0)) = 0 \\ & e^0 + 2e^0 (\varphi'_y(x_0, y_0) - \psi'_y(x_0, y_0)) - \frac{\varphi'_y(x_0, y_0)}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_y(x_0, y_0) + \psi'_y(x_0, y_0) &= 0 \\ 1 + \varphi'_y(x_0, y_0) - 2\psi'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme: $\varphi'_y(x_0, y_0) = -\frac{1}{3}, \psi'_y(x_0, y_0) = \frac{1}{3}$

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení.

Platí následující, neb $\varphi(x_0, y_0) = u_0, \psi(x_0, y_0) = v_0$.

$$\begin{aligned}(F_1)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 1 \\(F_1)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 0 \\(F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 1 \\(F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 1 \\(F_2)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -2 \\(F_2)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 1 \\(F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 1 \\(F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi'_x(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_x(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{3} = -1 \\ \varphi'_x(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0) \psi'_x(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-1 \cdot (-1) - 1}{1} = 0 \\ \psi'_y(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_y(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3} \\ \varphi'_y(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0) \psi'_y(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-1 \cdot \frac{1}{3} - 0}{1} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Spočteme derivace φ a ψ ještě **jedním způsobem** a to pomocí matice.

Z teorie (která pochází ze supersemináře) víme, že vektor $(\varphi_x(1, 2), \psi_x(1, 2))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{array} \right) (1, 2, 0, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_x(1, 2) = 0, \psi'_x(1, 2) = -1$.

Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{array} \right) (1, 2, 0, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\psi'_y(1, 2) = \frac{1}{3}$ a $\varphi'_y(1, 2) = -\psi'_x(1, 2) = -\frac{1}{3}$.

Příklad 1 (c) $x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}]$

Použijeme větu ?? o dvou implicitních funkcích. Zavedme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = x - e^u - u \sin v, F_2(x, y, u, v) = y - e^u + u \cos v.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojitě parciální derivace na okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$.

Spočtěme nyní parciální derivace funkcí F_1, F_2 .

$$\begin{aligned}
(F_1)'_x(x, y, u, v) &= 1 \\
(F_1)'_y(x, y, u, v) &= 0 \\
(F_1)'_u(x, y, u, v) &= -e^u - \sin v \\
(F_1)'_v(x, y, u, v) &= -u \cos v \\
(F_2)'_x(x, y, u, v) &= 0 \\
(F_2)'_y(x, y, u, v) &= 1 \\
(F_2)'_u(x, y, u, v) &= -e^u + \cos v \\
(F_2)'_v(x, y, u, v) &= -u \sin v
\end{aligned}$$

Dále platí následující, neb $\varphi(x_0, y_0) = u_0, \psi(x_0, y_0) = v_0$.

$$\begin{aligned}
(F_1)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 1 \\
(F_1)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 0 \\
(F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -e - 1 \\
(F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 0 \\
(F_2)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 0 \\
(F_2)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 1 \\
(F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -e \\
(F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -1
\end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{aligned}
&(F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) - (F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) = \\
&= (-e - 1) \cdot (-1) - 0 \cdot (-e) = e + 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Podle věty ?? tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$.

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení.

$$\begin{aligned}
\psi'_x(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_x(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{0 - 1 \cdot (-e)}{-e - 1} = \frac{-e}{e + 1} \\
\varphi'_x(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0) \psi'_x(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-0 - 1}{-e - 1} = \frac{1}{e + 1} \\
\psi'_y(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_y(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-e - 1 - 0}{-e - 1} = 1 \\
\varphi'_y(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0) \psi'_y(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{0 - 0}{e + 1} = 0
\end{aligned}$$

Spočtěme derivace φ a ψ ještě **jedním způsobem** a to pomocí matice.

Z teorie (která pochází ze supersemináře) víme, že vektor $(\varphi_x(1+e, e), \psi_x(1+e, e))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{array} \right) \left(1+e, e, 1, \frac{\pi}{2} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -e-1 & 0 & -1 \\ -e & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_x(1+e, e) = \frac{1}{1+e}$, $\psi'_x(1+e, e) = -e\varphi'_x(1+e, e) = -\frac{e}{1+e}$.

Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{array} \right) \left(1+e, e, 1, \frac{\pi}{2} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -e-1 & 0 & 0 \\ -e & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_y(1+e, e) = 0$, $\psi'_y(1+e, e) = -e\varphi'_y(1+e, e) + 1 = 1$.

Příklad 1 (d) $5xu + 3yv = 4x^2yv + 4u^2v$, $4xyu^3 + xv^2 = 5yuv$, $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 1, 1, 1]$

Použijeme větu ?? o dvou implicitních funkcích. Zaveďme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = 5xu + 3yv - 4x^2yv - 4u^2v, F_2(x, y, u, v) = 4xyu^3 + xv^2 - 5yuv.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojitě parciální derivace na okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$.

Spočtěme nyní parciální derivace funkcí F_1, F_2 .

$$\begin{aligned} (F_1)'_x(x, y, u, v) &= 5u - 8xyv \\ (F_1)'_y(x, y, u, v) &= 3v - 4x^2v \\ (F_1)'_u(x, y, u, v) &= 5x - 8uv \\ (F_1)'_v(x, y, u, v) &= 3y - 4x^2y - 4u^2 \\ (F_2)'_x(x, y, u, v) &= 4yu^3 + v^2 \\ (F_2)'_y(x, y, u, v) &= 4xu^3 - 5uv \\ (F_2)'_u(x, y, u, v) &= 12xyu^2 - 5yv \\ (F_2)'_v(x, y, u, v) &= 2xv - 5yu \end{aligned}$$

Dále platí následující, neb $\varphi(x_0, y_0) = u_0$, $\psi(x_0, y_0) = v_0$.

$$\begin{aligned} (F_1)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -3 \\ (F_1)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -1 \\ (F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -3 \\ (F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -5 \\ (F_2)'_x(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 5 \\ (F_2)'_y(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -1 \\ (F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 7 \\ (F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -3 \end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{aligned} & (F_1)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) - (F_1)'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \cdot (F_2)'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) = \\ & = -3 \cdot (-3) - (-5) \cdot 7 = 9 + 35 = 44 \neq 0 \end{aligned}$$

Podle věty ?? tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení.

$$\begin{aligned} \psi'_x(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_x(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-15 + 3 \cdot 7}{-44} = \frac{-3}{22} \\ \varphi'_x(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0) \psi'_x(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{5 \cdot \frac{-3}{22} + 3}{-3} = \frac{-15 + 3 \cdot 22}{-3 \cdot 22} = \frac{-51}{66} \\ \psi'_y(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_y(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0) (F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0) (F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{3 + 7}{-44} = \frac{-5}{22} \\ \varphi'_y(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0) \psi'_y(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{\frac{-25}{22} + 1}{-3} = \frac{-25 + 22}{-3 \cdot 22} = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

Spočtěme derivace φ a ψ ještě **jedním způsobem** a to pomocí matice.

Z teorie (která pochází ze supersemináře) víme, že vektor $(\varphi_x(1, 1), \psi_x(1, 1))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{array} \right) (1, 1, 1, 1) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -5 & 3 \\ 7 & -3 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -21 & -35 & 21 \\ 21 & -9 & -15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -44 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \text{Z matice vychází, že nutně } \psi'_x(1, 1) = -\frac{6}{44} = -\frac{3}{22} \text{ a } \varphi'_x(1, 1) = -\frac{1}{3} (3 + 5\psi'_x(1, 1)) = -\frac{1}{3} (3 + 5 \cdot \frac{-3}{22}) = \\ & -\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot (22-5)}{22} = -\frac{17}{22}. \end{aligned}$$

Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{array} \right) (1, 1, 1, 1) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -5 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -21 & -35 & 7 \\ 21 & -9 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -5 & 1 \\ 0 & -44 & 10 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \text{Z matice vychází, že nutně } \psi'_y(1, 1) = -\frac{10}{34} = -\frac{5}{22} \text{ a } \varphi'_y(1, 1) = -\frac{1}{3} (1 + 5 \cdot \psi'_y(1, 1)) = -\frac{1}{3} (1 + 5 \cdot \frac{-5}{22}) = \\ & -\frac{1}{3} \cdot \frac{22-25}{22} = \frac{1}{22}. \end{aligned}$$

Příklad 2 (a) $\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujeme a zavedeme funkci $F(x, y) = \arccos(\log x + \log y) - 3 \arcsin \frac{x+y}{4}$.
Ověřme předpoklady věty ??.

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= \frac{-1}{x\sqrt{1 - (\log x + \log y)^2}} - \frac{3}{4\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{4}\right)^2}} \\ F'_y(x, y) &= \frac{-1}{y\sqrt{1 - (\log x + \log y)^2}} - \frac{3}{4\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{4}\right)^2}} \end{aligned}$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka (iii) z věty ?? je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0]$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{-1}{1\sqrt{1-0^2}} - \frac{3}{4\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} = -1 - \frac{3}{4\sqrt{\frac{3}{4}}} = -1 - \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0$.

Dle věty ?? zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ : Podle věty ?? spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y(\varphi(y_0), y_0)}{F'_x(\varphi(y_0), y_0)} = -\frac{-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}}{-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}} = -1$$

Druhá derivace φ : Spočteme druhé partiální derivace funkce F a dosadíme do předpisu odvozeného v teorii k 5. cvičení.

Zdefinujme pro usnadnění výpočtu funkce: $g(x, y) := \frac{-1}{x\sqrt{1-(\log x + \log y)^2}}$, $h(x, y) := -\frac{3}{4\sqrt{1-(\frac{x+y}{4})^2}}$. Pak $F'_x(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$, $F'_y(x, y) = g(y, x) + h(x, y)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - (\log x + \log y)^2 + x \cdot (-2(\log x + \log y) \cdot \frac{1}{x})}{x^2 \cdot (1 - (\log x + \log y)^2)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1 - (0 + 0)^2 + 1 \cdot (-2(0 + 0) \cdot \frac{1}{1})}{1^2 \cdot (1 - (0 + 0)^2)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{(1 - (\frac{x+y}{4})^2)^3}} \cdot \frac{-x-y}{8}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{3}{64} \cdot \frac{1+1}{\sqrt{(1 - (\frac{1+1}{4})^2)^3}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,x}(x_0, y_0) = g'_x(x_0, y_0) + h'_x(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,y}(x_0, y_0) \stackrel{??}{=} F''_{y,x}(x_0, y_0) = g'_y(x_0, y_0) + h'_y(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{y,y}(\varphi(y_0), y_0) = g'_y(y, x) + h'_y(x, y) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,x}(x_0, y_0) + F''_{x,y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(y_0) = \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \cdot (-1) = 0$$

$$F''_{y,x}(x_0, y_0) + F''_{y,y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(y_0) = 0$$

Nyní dosadíme do předpisu pro φ'' , který je odvozen v teorii k 5. cvičení (z řetízkového pravidla). Uvědomme si však, že jelikož $x = \varphi(y)$, tak se nám prohodila role x a y , proto ve vzorci níže je např. ve jmenovateli $(F'_x)^2$ apod.

$$\begin{aligned}\varphi'' &= -\frac{(F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi') \cdot F'_x - F'_y \cdot (F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi')}{(F'_x)^2} = \\ &= -\frac{0 \cdot \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) - 0 \cdot \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)}{\left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = 0\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) = 1 - 1(y - 1) = 1 - y + 1 = 2 - y$$

Příklad 2 (b) $\sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) = 1$, $[x_0, y_0] = [-1, \frac{1}{2}]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujeme a zavedeme funkci $F(x, y) = \sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) - 1$. Ověříme předpoklady věty ??.

$$\begin{aligned}F'_x(x, y) &= \frac{1}{1+x^2} \cdot (\cos(\arctan x + \arctan(2y)) - \sin(\arctan x + \arctan(2y))) \\ F'_y(x, y) &= \frac{2}{1+4y^2} \cdot (\cos(\arctan x + \arctan(2y)) - \sin(\arctan x + \arctan(2y)))\end{aligned}$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka (iii) z věty ?? je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0]$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{1+(-1)^2} (\cos(\arctan(-1) + \arctan(1)) - \sin(\arctan(-1) + \arctan(1))) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) - \sin(0)) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Dle věty ?? zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ : Podle věty ?? spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y(\varphi(y_0), y_0)}{F'_x(\varphi(y_0), y_0)} = -\frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} = -2$$

Druhá derivace φ : Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned}
\varphi'(y) &= -\frac{F'_y(\varphi(y), y)}{F'_x(\varphi(y), y)} \\
A(y) &:= \frac{2}{1+4y^2} \cdot (\cos(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y)) - \sin(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y))) \\
B(y) &:= \frac{1}{1+\varphi(y)^2} \cdot (\cos(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y)) - \sin(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y))) \\
\varphi''(y) &= -\frac{A'(y)B(y) - A(y)B'(y)}{B^2(y)} \\
A(y_0) &= 1 \\
A'(y) &= \frac{-2 \cdot 8y}{(1+4y^2)^2} \cdot (\dots) + \frac{2}{1+4y^2} \cdot \left(\frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2} + \frac{2}{1+4y^2} \right) \cdot (-\sin(\dots) - \cos(\dots)) \\
A'(y_0) &= \frac{-16 \cdot \frac{1}{2}}{(2)^2} \cdot 1 + \frac{2}{2} \cdot \left(\frac{-1}{1+(-1)^2} + \frac{2}{1+1} \right) \cdot (-\sin(0) - \cos(0)) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \\
B(y_0) &= \frac{1}{2} \\
B'(y) &= \frac{-\varphi(y) \cdot \varphi'(y)}{(1+\varphi(y)^2)^2} \cdot (\dots) + \frac{1}{1+\varphi(y)^2} \cdot \left(\frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2} + \frac{2}{1+4y^2} \right) \cdot (-\sin(\dots) - \cos(\dots)) \\
B'(y_0) &= \frac{-(-1) \cdot (-2)}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{1+(-1)^2} + \frac{2}{1+1} \right) \cdot (-\sin(0) - \cos(0)) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \\
\varphi''(y_0) &= -\frac{-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{-3}{4}}{\frac{1}{4}} = -4 \cdot \frac{-5+3}{4} = 2
\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) = -1 - 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = -2y$$

Příklad 2 (c) $\arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}$, $[x_0, y_0] = [1, \pi]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujeme a zavedeme funkci $F(x, y) = \arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) - \frac{\pi}{4}$. Ověříme předpoklady věty ??.

$$\begin{aligned}
F'_x(x, y) &= \frac{1}{1+(x+\sin y)^2} + \frac{1}{1+(x+\cos y)^2} \\
F'_y(x, y) &= \frac{\cos y}{1+(x+\sin y)^2} + \frac{-\sin y}{1+(x+\cos y)^2}
\end{aligned}$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka (iii) z věty ?? je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0]$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+(1-1)^2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \neq 0$.

Dle věty ?? zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ : Podle věty ?? spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y(\varphi(y_0), y_0)}{F'_x(\varphi(y_0), y_0)} = -\frac{\frac{-1}{2} + 0}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Druhá derivace φ : Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\varphi'(y) = -\frac{F'_y(\varphi(y), y)}{F'_x(\varphi(y), y)}$$

$$A(y) := \frac{\cos y}{1 + (\varphi(y) + \sin y)^2} + \frac{-\sin y}{1 + (\varphi(y) + \cos y)^2}$$

$$B(y) := \frac{1}{1 + (\varphi(y) + \sin y)^2} + \frac{1}{1 + (\varphi(y) + \cos y)^2}$$

$$\varphi''(y) = -\frac{A'(y)B(y) - A(y)B'(y)}{B^2(y)}$$

$$A(y_0) = -\frac{1}{2}$$

$$A'(y) = \frac{-\sin y \cdot \left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right) - \cos y \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \sin y) (\varphi'(y) + \cos y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right)^2} +$$

$$+ \frac{-\cos y \cdot \left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right) + \sin y \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \cos y) (\varphi'(y) - \sin y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right)^2}$$

$$A'(y_0) = \frac{0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right)}{4} + \frac{1 \cdot \left(1 + (1 - 1)^2\right) + 0}{1} = \frac{8}{3 \cdot 4} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$B(y_0) = \frac{3}{2}$$

$$B'(y) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \sin y) (\varphi'(y) + \cos y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right)^2} + \frac{-1 \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \cos y) (\varphi'(y) - \sin y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right)^2}$$

$$B'(y_0) = \frac{-2 \cdot (1 + 0) \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{4} + \frac{-2 \cdot 0}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\varphi''(y_0) = -\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{1}{6}}{\frac{9}{4}} = \frac{16}{6} \cdot \frac{4}{9}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0) (y - y_0) = 1 + \frac{1}{3} \cdot (y - \pi) = \frac{y}{3} + 1 - \frac{\pi}{3}$$